Universidad Tecnológica del Valle del Mezquital

TÉCNICO SUPERIOR UNIVERSITARIO

EN

MECÁNICA ÁREA INDUSTRIAL

MANUAL DE CÁLCULO INTEGRAL

CUERPO COLEGIADO DE DIRECTORES Y PROFESORES

DICIEMBRE 2017

Contenido

ANTIDERIVACIÓN

La antiderivación o antidiferenciación es la operación inversa a la derivación.

Definición de Antiderivada

Una función F se denomina antiderivada de la función f en un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para todo valor de x en I.

- **Ejemplo 1**.

Si F es la función definida por $F(x) = 4x^3 + x^2 + 5$, entonces $f(x) = 12x^2 + 2x$.

f es la derivada de F, y F es la antiderivada de f. Si G es la función definida por

$$G(x) = 4x^3 + x^2 - 17$$

entonces G también es una antiderivada de f porque $G'(x) = 12x^2 + 2x$. En realidad, cualquier función determinada por

$$4x^3 + x^2 + C.$$

Donde C, es una constante, es una antiderivada de f.

- **Ejemplo 2.**

Si C es una constante arbitraria, entonces cualquier función definida por

$$sen\, x + c$$

tiene la función $cos\, x$ como derivada, por tanto cualquier función de este tipo es una antiderivada de $cos\ x$.

Para generalizar los ejemplos anteriores, considere la función F como una antiderivada de la función f en un intervalo I, de modo que

$$F'(x) = f(x)$$

Entonces si G es una función definida por

$$G(x) = F(x) + C$$

Donde C es una constante arbitraria,

$$G'(x) = F'(x) + C$$

$$= f(x)$$

G es también una antiderivada de $f(x)$ en el intervalo I.

La antiderivación o antidiferenciación es el proceso mediante el cual se determina el conjunto de todas las antiderivadas de una función dada. El símbolo $\int$ denota la operacion antiderivación y se escribe:

$$\int f(x) = F(x) + C \tag{2}$$

Donde

$F'(x) = f(x)$ y

$$d(F(x)) = f(x)\,dx \tag{3}$$

La expresión de $F(x) + C$ en (2), recibe el nombre de antiderivada general de f.

Leibnitz introdujo la convección de escribir la diferencial de una función antes del símbolo de antiderivación. De 2 y 3 se puede escribir:

$$\int d(F(x)) = F(x) + C \tag{4}$$

Esta ecuación establece que cuando se antideriva la diferencial de una función, se obtiene esa función más una constante arbitraria. La diferencial d sirve para identificar a la variable de integración. De este modo puede considerarse que el símbolo para antiderivación representa la operación inversa a la operación denotada por d para calcular una diferencial.

INTEGRAL INDEFINIDA

El termino integral indefinida es sinónimo de antiderivada.

REGLAS BÁSICAS DE INTEGRACIÓN

Como la antiderivacion es una operación inversa de la derivación las reglas de antiderivación se obtienen de los teoremas de diferenciación.

Fórmula de derivación	*Fórmula de integración*	
$\frac{d}{dx}[C] = 0$	$\int 0\, dx = C$	
$\frac{d}{dx}[kx] = k$	$\int k\, dx = kx + C$	
$\frac{d}{dx}[kf(x)] = kf'(x)$	$\int kf(x)\, dx = k\int f(x)\, dx$	
$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$	$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$	
$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$	$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$	Regla de las potencias.
$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] = \cos x$	$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$	
$\frac{d}{dx}[\cos x] = -\operatorname{sen} x$	$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$	
$\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$	
$\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$	
$\frac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x$	$\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$	
$\frac{d}{dx}[\csc x] = -\csc x \cot x$	$\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + C$	

APLICACIÓN DE LAS REGLAS BÁSICAS DE ANTIDERIVACIÓN

Ejemplos ilustrativos

1. $\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + C$

Aplicando la regla: $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$

2. $\int (3x + 5)\, dx$

Aplicando la regla: $\int [f(x) + g(x)]\ dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

$$\int (3x + 5)\, dx = \int 3x\, dx + \int 5\, dx$$

Utilizando esta regla: $\int a\ f(x)\ dx = a\ \int f(x)\, dx$

$$= 3\int x\, dx + 5\int\ dx$$

Utilizando:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1 \qquad\qquad \int dx = x + C$$

Se tiene:

$$= 3\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) + 5\,(x + C_2)$$

$$= \frac{3}{2}\,x^2 + 5\,x + (3C_1 + 5C_2)$$

Como $3C_1 + 5C_2$ es una constante arbitraria, puede denotarse por C; de modo que el resultado puede escribirse.

$$\frac{3}{2}\,x^2 + 5\,x + C$$

La respuesta puede verificarse al calcular la derivada:

$$D_x\left(\frac{3}{2}\,x^2 + 5\,x + C\right) = 3x + 5$$

3. $\int (3\,secx\,tanx - 5\,csc^{\,2}\,x)\,dx$

Aplicando las siguientes reglas:

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$$
$$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

Se tiene:

$$\int (3\,secx\,tanx - 5\,csc^{\,2}\,x)\,dx = 3\int secx\,tanx\,dx - 5\int csc^2\,x\,dx$$
$$= 3\sec x - (5\cot x) + C$$
$$= 3\sec x + 5\cot x + C$$

Las funciones trigonométricas se emplean con frecuencia cuando se calculan antiderivadas que involucran funciones trigonométricas. Las ocho identidades fundamentales siguientes son de crucial importancia:

$\operatorname{sen} x \csc x = 1$	$\cos x \sec x = 1$	$\tan x \cot x = 1$
$\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$	$\cot x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$	
$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$	$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$	$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$

4. $\int (tan^2\, x + cot^2 x + 4) dx$

$$= \int [(sec^2 x - 1) + (csc^2 x - 1) + 4]\ dx$$

$$= \int sec^2\, x\ dx + \int csc^2\, x\ dx + 2 \int dx$$

Aplicando:

$$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$$

Se tiene:

$$tan\ x - cot\ x\ + 2x + C$$

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Muchas antiderivadas no pueden determinarse aplicando únicamente los teoremas/reglas básicas de integración. En esta sección, se estudiarán técnicas que requieran la regla de la cadena para la antiderivación y aquellas que implican un cambio de variable.

Si se requiere antiderivar $(1 + x^2)^9$ $(2x)$, esto es, se desea calcular:

$$\int (1 + x^2)^9\ (2x\ dx)$$

A fin de diferenciar $\frac{1}{10}(1 + x^2)^{10}$ se aplica la regla de la cadena para la diferenciación y se obtiene:

$$D_x \left[\frac{1}{10}(1 + x^2)^{10}\right] = (1 + x^2)^9\ (2x)$$

Ahora suponga que se quiere antiverivar $(1 + x^2)^9\ (2x\ dx)$, esto es, se desea calcular:

$$\int (1 + x^2)^9\ (2x\ dx) \qquad (1)$$

Con objeto de tener un procedimiento que pueda emplearse en tal situación, considere:

$$g\ (x) = 1 + \ x2 \quad y \quad g'(x)\ dx = 2x\ dx \qquad (2)$$

Entonces (1) puede escribirse como

$$\int [g(x)]^9 [g'(x)dx] \qquad (3)$$

De la regla $\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$ se tiene

$$\int u^9\ du = \frac{1}{10}\ u^{10} + C \qquad (4)$$

Observe que (3) es de la misma forma que el miembro izquierdo de (4) de modo que:

$$\int [g(x)]^9 [g'(x)dx] = \frac{1}{10}\ u^{10} + C$$

Y con $g(x)$ y $g'(x)\ dx$ dados en (2)

$$\int (1 + x^2)^9\ (2x\ dx) = \frac{1}{10}\ u^{10} + C$$

La justificación del procedimiento utilizado para obtener el resultado es proporcionado por la regla de la cadena de antiderivación:

Sea g una función diferenciable y sea el contradominio de g algún intervalo I. Suponga que f es una función definida en I y que F es una antiderivada de f en I. Entonces

$$\int f(g(x))[g'(x)\ dx] = F(g(x)) + C$$

Como un caso particular de la regla de la cadena para antiderivación, de la regla de $\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq 1$, se tiene la generalización de la fórmula de la potencia para antiderivadas, la cual se establece a continuación.

Si g es una función diferenciable y n es un número racional, entonces

$$\int [g(x)]^n [g'(x)\ dx] = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

Ejemplo

$$\int \sqrt{3x+4}\ dx = \int (3x+4)^{1/2}\ dx$$

Si $g(x) = 3x + 4, g'(x) = 3\,dx$ (6)

Por tanto se necesita un factor 3 junto a dx para obtener $g'(x)$. En consecuencia se escribe

$$\int (3x+4)^{1/2}\ dx = \int (3x+4)^{1/2} \frac{1}{3}\ (3dx)$$

$$= \frac{1}{3} \int (3x+4)^{1/2}\ (3dx)$$

Así por la regla de potencia con g (x) y g'(x) dadas en 6, se tiene:

$$\frac{1}{3} \int (3x+4)^{1/2}\ (3dx) = \frac{1}{3}\ \frac{(3x+4)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{9}\ (3x+4)^{\frac{3}{2}} + C$$

CAMBIO DE VARIABLE

En ocasiones es posible calcular una antiderivada después de un **cambio de variable** adecuado, como se muestra en el ejemplo siguiente:

$$\int x^2\ \sqrt{1+x}\ dx$$

Sean $u = 1 + x \quad du = dx \quad x = u - 1$

Entonces se tiene:

$$\int x^2 \sqrt{1+x}\ dx = \int (u-1)^2\ u^{1/2}\ du$$

$$= \int (u^2 - 2u + 1)\ u^{1/2}\ du$$

$$= \int u^{5/2}\ du - 2 \int u^{3/2}\ du + \int u^{1/2}\ du$$

$$= \frac{u^{7/2}}{\frac{7}{2}} - 2\ \frac{u^{5/2}}{\frac{5}{2}} + \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{7}(1+x)^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} + C$$

Ejemplo

$$\int sen\, x\, \sqrt{1-\cos x}\; dx$$

$$u = 1 - \cos x \quad du = sen\, x\, dx$$

Así,

$$\int sen\, x\, \sqrt{1-\cos x}\; dx = \int u^{1/2}\; du$$

$$= \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3}(1-\cos x)^{\frac{3}{2}} + C$$

INTEGRACIÓN POR PARTES

Es una de las técnicas de integración más ampliamente utilizadas, que se obtiene de la fórmula para la derivada del producto de dos funciones. Si f y g son funciones diferenciables, entonces:

$$D_x[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

$$f(x)g'(x) = D_x[f(x)g(x)] - g(x)f'(x)$$

Al integrar cada miembro de la ecuación, se obtiene:

$$\int f(x)g'(x) = \int D_x\; [f(x)g(x)dx] - \int g(x)f'(x)dx$$

$$\int f(x)g'(x) = f(x)g(x)dx - \int g(x)f'(x)dx \qquad (1)$$

La fórmula (1) recibe el nombre de fórmula de integración por partes. Para los propósitos de cálculo, una forma más conveniente de esta fórmula se obtiene al considerar

$$u = f(x) \quad y \quad v = g(x)$$

Entonces

$$du = f'(x)\, dx \quad y \quad dv = g'(x)dx$$

De modo que (1) se transforma en:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du \qquad (2)$$

Esta fórmula expresa la integral $\int u\, dv$, en términos de otra integral $\int v\, du$. Cuando se eligen las sustituciones para $u\ y\ dv$, por lo general se considera que dv es el factor más complejo del integrando y puede integrarse directamente, y que u es una función cuya derivada es una función más simple.

Ejemplo

$$\int x \ln x\, dx$$

A fin de determinar las sustituciones de $u\ y\ dv$, tenga en mente que para obtener v debe integrarse dv. Esto sugiere que se considere $dv = x\, dx\ y\ u = ln\, x$. Entonces:

$$v = \frac{x^2}{2} + C\ y\ du = \frac{dx}{x}$$

A l sustituir los valores correspondientes en la fórmula correspondiente (2) se obtiene:

$$\int x \ln x\, dx = \ln x\ (\ \tfrac{x^2}{2} + C_1) \text{ -}\int (\tfrac{x^2}{2} + C_1)\tfrac{dx}{x}$$

$$= \ln x\ \frac{x^2}{2} + \ln x\ C_1 - \frac{1}{2}\int x\, dx - C_1 \int \frac{dx}{x}$$

$$= \tfrac{x^2}{2} + \ln x\ C_1 - \tfrac{x^2}{4} - C_1 lnx + C_2$$

$$= \tfrac{1}{2}x^2 \ln x - \tfrac{x^2}{4} + C_2$$

En el ejemplo se observa que la primera constante de integración C_1 no aparece en la respuesta final C_1 se utiliza solo para mostrar que todas las elecciones para v de la forma $\frac{1}{2}x^2 + C_1$ conducen al mismo resultado de $\int x \ln x\, dx$. Esta situación es general, y se demostrará como sigue:

$$\int u\, dv = u(v + C_1) - \int (v + C_1)\, du$$

$$= uv + uC_1 - \int (v\, du - C_1 \int du$$

$$= uv + uC_1 - \int v\, du - C_1 u$$

$$= uv - \int v\, du$$

Por tanto no es necesario escribir C_1 cuando se determine v a partir de dv.

Se verificará el resultado del ejemplo mediante el cálculo de la derivada de la respuesta.

$$Dx(\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2) = x \ \ln x + \frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}x$$

$$= x \ \ln x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x$$

$$= x \ \ln x$$

Ejemplo

$$\int x \cos x \, dx$$

Sean $u = x \; y \; dv = cos \; x \; dx$. Entonces $du = dx \; y \; v = sen \; x$

Por lo tanto,

$$\int x \cos x \, dx = x \ sen \, x - \int sen \, x \, dx$$

$$= x \ sen \, x + \cos x + C$$

SUSTITUCIÓN TRIGONOMETRICA

En esta sección se estudiaran sustituciones que implican funciones trigonométricas las cuales conducen a integrales trigonométricas. Se mostrará con 3 casos como el cambio de variable mediante sustitución trigonométrica permite con frecuencia evaluar una integral que contiene una expresión de una delas formas siguientes donde a >0.

$$\sqrt{a^2 - x^2} \qquad \sqrt{a^2 + x^2} \qquad \sqrt{x^2 - a^2}$$

CASO 1 El integrando contiene una expresión de la forma $\sqrt{a^2 - x^2}$, donde $a > 0$.

Introduzca una nueva variable θ considerando $x = a \operatorname{sen} \theta$, donde

$0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$ si $x \geq 0$ y $-\frac{1}{2}\pi \leq \theta < 0$ si $x < 0$

En este caso, con $x = a \operatorname{sen} \theta$, $dx = a \cos \theta \, d\theta$, y $\cos \theta \geq 0$ porque $-\frac{1}{2}\pi \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$. Más aún,

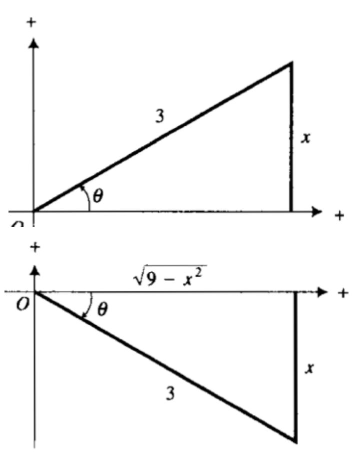
$$\begin{aligned}
\sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \\
&= \sqrt{a^2}\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta} \\
&= \sqrt{\cos^2 \theta} && \text{porque } a > 0 \\
&= a \cos \theta && \text{porque } \cos \theta \geq 0
\end{aligned}$$

Ejemplo

$$\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}\, dx$$

El denominador es x^2, entonces $x \neq 0$. Con la sustitución indicada en el caso I. Sea $x = 3\, sen\, \theta,$ donde $0 < \theta \leq \frac{1}{2}\pi$ si $x > 0$, y $-\frac{1}{2}\pi \leq \theta < 0$ si $x < 0$. Entonces, $dx = 3\cos\theta\, d\theta$ y

$$\begin{aligned}
\sqrt{9 - x^2} &= \sqrt{9 - 9\, sen^2\theta} \\
&= 3\sqrt{\cos^2\theta} \\
&= 3\cos\theta
\end{aligned}$$



$x < 0$

FIGURA 2

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}\, dx &= \int \frac{3 \cos \theta}{9 \operatorname{sen}^2 \theta} (3 \cos \theta \, d\theta) \\
&= \int \cot^2 \theta \, d\theta \\
&= \int (\csc^2 \theta - 1)\, d\theta \\
&= -\cot \theta - \theta + C
\end{aligned}$$

Como $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{3}x$ y $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$, $\theta = \operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{3}x$. A fin de determinar $\cot \theta$, refiérase a las figuras 1 (para $x > 0$) y 2 (para $x < 0$). En cualquier caso

$$\cot \theta = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}$$

Así,

CASO 2 El integrando contiene una expresión de la forma $\sqrt{a^2 + x^2}$, donde $a > 0$.

Introduzca una nueva variable θ considerando $x = a \tan \theta$, donde

$$0 \leq \theta < \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{si } x \geq 0 \quad \text{y} \quad -\tfrac{1}{2}\pi < \theta < 0 \quad \text{si } x < 0$$

Con $x = a \tan \theta$, $dx = a \sec^2 \theta \, d\theta$, y como $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$, $\sec \theta \geq 1$. Además,

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 + x^2} &= \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 \theta} \\ &= \sqrt{a^2}\sqrt{1 + \tan^2 \theta} \\ &= a\sqrt{\sec^2 \theta} \\ &= a \sec \theta\end{aligned}$$

Ejemplo

$$\int \sqrt{x^2 + 5}\; dx$$

Sea $x = \sqrt{5} \tan \theta$, donde $0 \leq \theta < \frac{1}{2}\pi$ si $x \geq 0$, y $-\frac{1}{2}\pi < \theta < 0$ si $x < 0$. Entonces, $dx = \sqrt{5}\, sec^2\theta \, d\theta$ y

$$\begin{aligned}\sqrt{5 + x^2} &= \sqrt{5\, tan^2\theta + 5} \\ &= \sqrt{5}\sqrt{\sec^2 \theta} \\ &= \sqrt{5} \sec \theta\end{aligned}$$

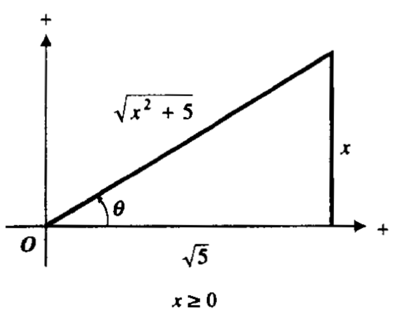


FIGURA 3

Por tanto,

$$\int \sqrt{x^2 + 5}\; dx = \int \sqrt{5} \sec \theta \; (\sqrt{5}\, sec^2\theta \, d\theta\,)$$

$$= 5 \int \sec^3 \theta \; d\theta$$

$$\int \sqrt{x^2 + 5}\; dx = \frac{5}{2} \sec \theta \tan \theta + \frac{5}{2} \ln|\sec \theta + \tan \theta| + C$$

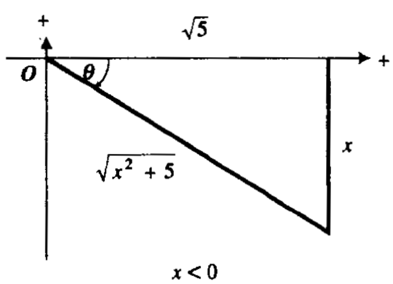


FIGURA 4

Se determina $\sec \theta$ a partir de las figuras 3 (para $x \geq 0$) y 4 (para $x < 0$). En ambos casos

$$\sec \theta = \frac{\sqrt{x^2 + 5}}{\sqrt{5}}$$

En consecuencia,

$$\int \sqrt{x^2+5}\,dx = \frac{5}{2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}}\cdot\frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{5}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}} + \frac{x}{\sqrt{5}}\right| + C$$

$$= \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+5} + \tfrac{5}{2}\ln\left|\sqrt{x^2+5}+x\right| - \tfrac{5}{2}\ln\sqrt{5} + C$$

$$= \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+5} + \tfrac{5}{2}\ln(\sqrt{x^2+5}+x) + C_1$$

CASO 3 El integrando contiene una expresión de la forma $\sqrt{x^2-a^2}$, donde $a > 0$.

Introduzca una nueva variable θ considerando $x = a \sec\theta$, donde

$$0 \leq \theta < \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{si } x \geq a \quad \text{y} \quad \pi \leq \theta < \tfrac{3}{2}\pi \quad \text{si } x \leq -a$$

Con $x = a\sec\theta$, $dx = a\sec\theta\tan\theta\,d\theta$, y $\tan\theta \geq 0$ porque $0 \leq \theta < \frac{1}{2}\pi$ o $\pi \leq \theta < \frac{3}{2}\pi$. Además,

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-a^2} &= \sqrt{a^2\sec\theta - a^2}\\ &= \sqrt{a^2}\sqrt{\sec^2\theta - 1}\\ &= a\sqrt{\tan^2\theta}\\ &= a\tan\theta\end{aligned}$$

Ejemplo

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$$

Se observa que $|x|$ debe ser mayor de 3 de modo que $\sqrt{x^2-9}$ sea un número real distinto de cero. Sea $x = 3\sec\theta$, donde $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ si $x > 3$, y $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ si $x < -3$. Entonces, $dx = 3\sec\theta\tan\theta\,d\theta$ y

$$\sqrt{x^2-9} = \sqrt{9sec^2\theta - 9}$$
$$= 3\sqrt{\tan^2\theta}$$
$$= 3\ tan\theta$$

Por tanto

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}} = \int \frac{3\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{27\sec^3\theta \cdot 3\tan\theta}$$
$$= \frac{1}{27}\int \cos^2\theta\, d\theta$$
$$= \frac{1}{54}\int (1 + \cos 2\theta)\, d\theta$$
$$= \tfrac{1}{54}(\theta + \tfrac{1}{2}\text{sen}\, 2\theta) + C$$
$$= \tfrac{1}{54}(\theta + \text{sen}\,\theta\cos\theta) + C$$

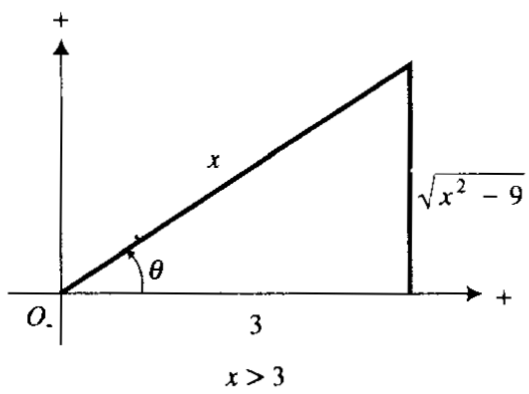


FIGURA 6

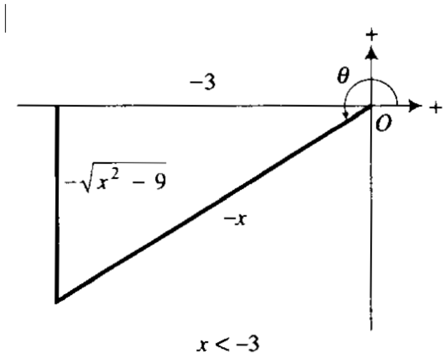


FIGURA 7

Como $\sec\theta = \frac{1}{3}x$ y θ está en $(0, \frac{1}{2}\pi) \cup (\pi, \frac{3}{2}\pi)$, $\theta = \sec^{-1}\frac{1}{3}x$. Cuando $x > 3$, $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$, y se obtienen sen θ y cos θ de la figura 6. Cuando $x < -3$, $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ y de la figura 7 se obtienen sen θ y cos θ. En ambos casos

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} \quad \text{y} \quad \cos\theta = \frac{3}{x}$$

Así,

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}} = \frac{1}{54}\left(\sec^{-1}\frac{x}{3} + \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\cdot\frac{3}{x}\right) + C$$
$$= \tfrac{1}{54}\sec^{-1}\frac{x}{3} + \frac{\sqrt{x^2-9}}{18x^2} + C$$

FRACCIONES PARCIALES

Cuando se desea representar una expresión racional simple como una suma de dos o más cocientes simples, llamados **fracciones parciales**. Necesitará realizar esto con frecuencia cuando integre funciones racionales.

Considere una función racional H definida por

$$H = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios. Se asumirá que se tiene una fracción propia, esto es una fracción par la cual, el grado de $P(x)$ esmenor que el grado de $Q(x)$.

Si se tiene una fracción impropia, en este se realiza la división hasta obtener la fracción propia.

En general, se tratará un método para descomponer una fracción propia de la forma $P(x)\,/Q(x)$ en dos o más fracciones parciales. Los denominadores de las fracciones parciales se obtienen al factorizar $Q(x)$ en un producto de factores lineales y cuadráticos, el método para determinar las fracciones parciales depende de la naturaleza de estos factores.

Caso 1: Todos los factores de $Q(x)$ son lineales, y ninguno se repite. Esto es,

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \cdot \, . \, . \, . \, \cdot (a_nx + b_n)$$

donde ningún par de factores es idéntico. En este caso se escribe

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \, . \, . \, . \, + \frac{A_n}{a_nx + b_n}$$

donde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son constantes a determinar. Observe que esta ecuación es una identidad debido a que es verdadera para todos los valores de x tales que ningún denominador es cero. El ejemplo ilustrativo siguiente muestra un método para determinar los valores de A_i.

Ejemplo 1

$$\int \frac{7x-1}{x^2-x-6}\,dx$$

Al factorizar el denominador del integrando se obtiene

$$\frac{7x-1}{x^2-x-6} = \frac{7x-1}{(x+2)(x-3)}$$

Por tanto se tiene

$$\frac{7x-1}{x^2-x-6} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-3)} \qquad (1)$$

La ecuación (1) es una identidad para todos los valores de x diferentes de -2 y 3. Al multiplicar los dos miembros de la ecuación por el MCDn (mínimo común denominador), resulta:

$$7x-1 = A(x-3) + \; B(x+3)$$

Esta ecuación también es una identidad y es verdadera para todos los valores de x incluyendo -2 y 3. Ahora se determinarán las constantes A y B. Al sustituir 3 por x en la ecuación anterior, se tiene:

$$20 = 5B$$

$$B = 4$$

Si se sustituye -2 por x en la misma ecuación, se obtiene:

$$-15 = -5A$$

$$A = 3$$

Con estos valores de A y B, se tiene de (1)

$$\int \frac{7x-1}{x^2-x-6}dx = \int \frac{3}{(x+2)}dx + \int \frac{4}{(x-3)}dx$$

$$= 3\ln|x+2| + 4\ln|x-3| + C$$

$$= \ln|(x+2)^3| + \ln|(x-3)^4| + C$$

$$= \ln|(x+2)^3(x-3)^4| + C$$

Caso 2: Todos los factores de $Q(x)$ son lineales y algunos se repiten.

Suponga que se tiene $(ax + b)^p$ como un factor de $Q(x)$. Entonces se dice que $ax + b$ es un factor **p-múltiple** (o **de multiplicidad p**) de $Q(x)$, y a este factor le corresponderá la suma de p fracciones parciales

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \ldots + \frac{A_{p-1}}{(ax+b)^{p-1}} + \frac{A_p}{(ax+b)^p}$$

donde $A_1, A_2, \ldots, A_p$ son constantes a determinar. El ejemplo 2 ilustra este caso y el método para determinar cada A_i.

Ejemplo 2

$$\int \frac{x^4+x^2+16x-12}{x^3(x-2)^2}dx$$

Se escribe la fracción dada como la suma de fracciones parciales siguiente:

$$\frac{x^4+x^2+16x-12}{x^3(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{(x-2)} + \frac{E}{(x-2)^2} \qquad (1)$$

Al multiplicar ambos miembros de la ecuación por MCDn, se tiene

$$x^4 + x^2 + 16x - 12 = Ax^2(x-2)^2 + Bx(x-2)^2 + C(x-2)^2 + Dx^3(x-2) + Ex^3$$

Se sustituye 0 por x en la ecuación (1) y se obtiene

$$-12 = 4C \qquad C = -3$$

Si se sustituye 2 por x en (1) y se tiene

$$40 = 8E \qquad E = 5$$

Con estos valores de $C\ y\ E$ en 1 y desarrollando las potencias de los binomios, se tiene:

$$x^4 + x^2 + 16x - 12 = Ax^2(x^2 - 4x + 4) + Bx(x^2 - 4x + 4) + C(x^2 - 4x + 4) + Dx^3(x-2) + Ex^3$$

$$x^4 + x^2 + 16x - 12 = (A+D)x^4 + (-4A + B - 2D + 5)x^3 + (4A - 4B - 3)x^2 + (4B + 12)x - 12$$

Comoestaecuación es una identidad,los coeficientes del miembro izquierdo deben ser iguales a los correspondientes del miembro derecho. Por tanto, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$A + D = 1$$

$$-4A + B - 2D + 5 = 0$$

$$4A - 4B - 3 = 1$$

$$4B + 12 = 16$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones,el valor de las constantes son:

$$A = 2 \qquad B = 1 \qquad C = -3 \qquad D = -1 \qquad E = 5$$

Con estos valores de (1) se tiene:

$$\frac{x^4 + x^2 + 16x - 12}{x^3(x-2)^2} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{-3}{x^3} + \frac{-1}{(x-2)} + \frac{5}{(x-2)^2}$$

$$\int \frac{x^4 + x^2 + 16x - 12}{x^3(x-2)^2} = \int \frac{2}{x}dx + \int \frac{1}{x^2}dx + \int \frac{-3}{x^3}dx + \int \frac{-1}{(x-2)}dx + \int \frac{5}{(x-2)^2}\,dx$$

$$= 2\ln x - \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^2} - ln|x-2| - \frac{5}{(x-2)} + C$$

Caso 3: Todos los factores de $Q(x)$ son lineales y cuadráticos y ninguno se repite.

Al factor cuadrático $ax^2 + bx + c$ del denominador le corresponde la fracción parcial de la forma

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

Caso 4: Los factores de $Q(x)$ son lineales y cuadráticos, y algunos de los factores cuadráticos se repiten.

Si $ax^2 + bx + c$ es un factor cuadrático de multiplicidad p de $Q(x)$, entonces al factor $(ax^2 + bx + c)^p$ le corresponde la suma de las siguientes p fracciones parciales:

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \ldots + \frac{A_px + B_p}{(ax^2 + bx + c)^p}$$

INTEGRAL DEFINIDA

Sea f una función definida en el intervalo cerrado $[a,b]$. Divida este intervalo en n subintervalos eligiendo cualesquiera $n-1$ puntos intermedios entre $a\ y\ b$. Sean $x_0 = a\ y\ x_n = b,$ y sean $x_1, x_2, \dots\dots\dots\dots\dots..x_{n-1}$ los puntos intermedios de modo que:

$$x_0 < x_1 < x_2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots..< x_{n-1} < x_n$$

Los puntos $x_0\,, x_1 \dots\dots..x_{n-1}, x_n$no son necesariamente equidistantes. Sea Δx_i la longitud del primer subintervalo de modo que $\Delta_1 x = x_1 - x_0$, el segundo $\Delta_2 x = x_2 - x_1$ y así sucesivamente de modo que la longitud del i-enésimo subintervalo es $\Delta_1 x$, y

$$\Delta_1 x = x_i - x_{i-1}$$

Al conjunto de estos subintervalos del intervalo $[a,b]$ se le denomina partición de intervalo $[a,b]$. Sea Δ dicha partición. La figura 1 muestra una de estas particiones Δ de $[a,b]$.

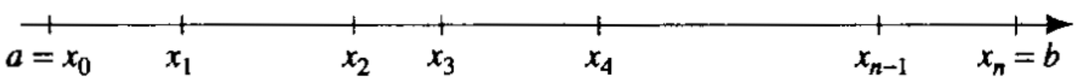


FIGURA 1

La partición Δ contiene n subintervalos. La longitud del subintervlo más largo se llama norma de la partición y se denota por $\|\Delta\|$.

Elija un punto en cada subintervalo de la partición Δ: sea $w_1$el punto elegido en $[x_0, x_1]$ de modo que $x_0 \le w_1 \le x_1$. Sea $w_2$el punto elegido en $[x_1, x_2]$ de modo que $x_1 \le w_2 \le x_2$ y así sucesivamente, de modo que w_i es el punto elegido en $[x_{i-1}, x_i]$ de modo que $x_{i-1} \le w_i \le x_i$. Considere:

$$f(w_1)\Delta_1 x + f(w_2)\Delta_2 x \dots. + f(w_i)\Delta_i x + \dots + f(w_n)\Delta_n x \qquad (1)$$

O bien:

$$\sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta_i x \qquad (2)$$

Esta última suma recibe el nombre de suma de Riemann, en honor al matemático alemán Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1886).

La interpretación geométrica de la suma de Riemann, sería la suma de las medidas delas áreas de los rectángulos que están sobre el eje x y los negativos de las medidas de las áreas de los rectángulos que se encuentran debajo del eje x. Esta situación se ilustra en la figura 2.

Aquí,

$$\sum_{i=1}^{10} f(w_i)\Delta_i x = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8 + A_9 + A_{10}$$

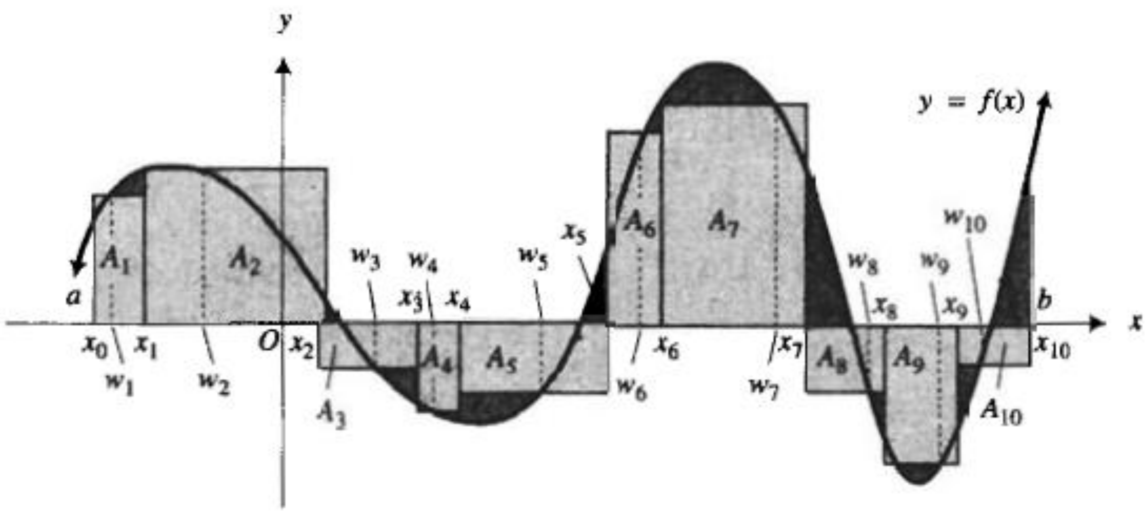


FIGURA 2

Suponga que para la función f en (2) existe un número L tal que:

$$\sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta_i x - L$$

Puede hacerse tan pequeño como se desee para todas las particiones Δ cuyas normas sean suficientemente pequeñas, y para cualquier w_i en el intervalo cerrado $[x_{i-1}, x_i]$,i =1,2,……..n. En tal caso se dice que f es integrable en $[a, b]$.

Definición de función integrable en un intervalo cerrado.

Sea f una función cuyo dominio contiene al intervalo cerrado $[a, b]$. Se dice que f es **integrable** en $[a, b]$ si existe un número L que satisface la condición de que, para cualquier $\epsilon > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que para toda partición Δ para la cual $\|\Delta\| < \delta$, y para cualquier w_i del intervalo cerrado $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\,\Delta_i x - L \right| < \epsilon \qquad (3)$$

Esta situación se representa como

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\,\Delta_i x = L \qquad (4)$$

Si existe un número L que satisfaga la definición anterior, entonces es único. Ahora puede definirse la integral definida.

Si f es una función definida en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces la **integral definida** de f de a a b, denotada por $\int_a^b f(x)\,dx$, está dada por

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\,\Delta_i x \qquad (6)$$

si el límite existe.

En la notación de la integral definida $\int_a^b f(x)dx$, $f(x)$ es el **integrando**, a es el **límite inferior** y b es el **límite superior.** El símbolo $\int$ es el **signo de integración**.

Teorema

Si una función es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces es integrable en $[a, b]$.

Si Δx es la longitud de cada subintervalo en una partición regular, entonces cada Δx_i= Δx, y la norma de la partición es Δx. Al sustituir esto en (6) se obtiene:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\,\Delta x \qquad \textbf{(7)}$$

Además,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{y} \quad n = \frac{b-a}{\Delta x}$$

Así,

$$\lim_{n \to +\infty} \Delta x = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{\Delta x \to 0} n = +\infty$$

La razón de que $\lim_{\Delta x \to 0} n = +\infty$ es que $b > a$ y Δx se aproxima a cero a través de valores positivos (porque $\Delta x > 0$). A partir de estos límites se concluye que

$$\Delta x \to 0 \quad \text{es equivalente a} \quad n \to +\infty$$

De modo que de este enunciado y de (7), se tiene

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\,\Delta x \qquad \textbf{(8)}$$

Si la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ existe, es el límite de todas las sumas de Riemann de f en $[a, b]$. Debido a esto, se redefine el área de una región de una manera más general.

Definición del área de una región plana

Sea f una función continua en $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$. Sea R la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$. Entonces la medida A del **área de la región** R está dada por

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\,\Delta_i x$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx$$

De esta definición, si f es continúa en $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$, entonces la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ puede interpretarse geométricamente como la medida del área dela región R, mostrada en la Figura 3.

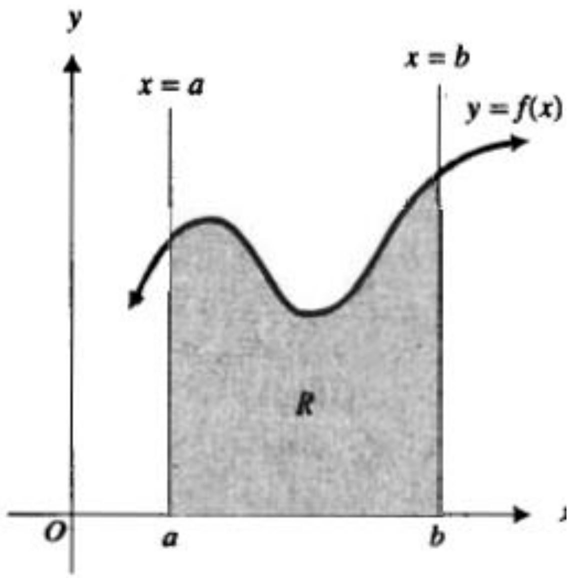
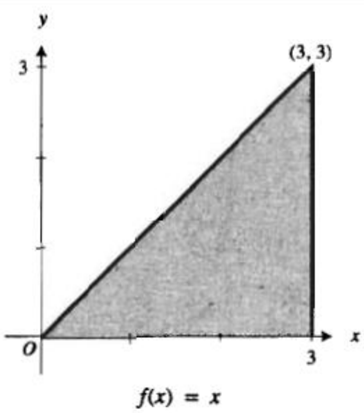


FIGURA 3

Ejemplo 1

$$\int_0^3 x\,dx$$



Con $f(x) = x$, la figura 4 muestra la región triangular limitada superiormente por la gráfica de f, inferiormente por el eje x, y por la derecha por la recta $x = 3$. De la fórmula para el área de un triángulo, el número de unidades cuadradas del área es $\frac{1}{2}(3)(3) = \frac{9}{2}$. Por tanto,

$$\int_0^3 x\,dx = \frac{9}{2}$$

FIGURA 4

Ejemplo 2

$$\int_0^{2/\pi} sen\,x\,dx$$

La gráfica de la función seno de 0 a 2π se muestra en la figura 5 Sean A_1 unidades cuadradas y A_2 unidades cuadradas las áreas de las regiones limitadas por la curva senoidal y el eje x en los intervalos $[0, \pi]$ y $[\pi, 2\pi]$, respectivamente. Entonces, como A_1 y A_2 son iguales, se tiene

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\, dx = A_1 - A_2$$
$$= 0$$

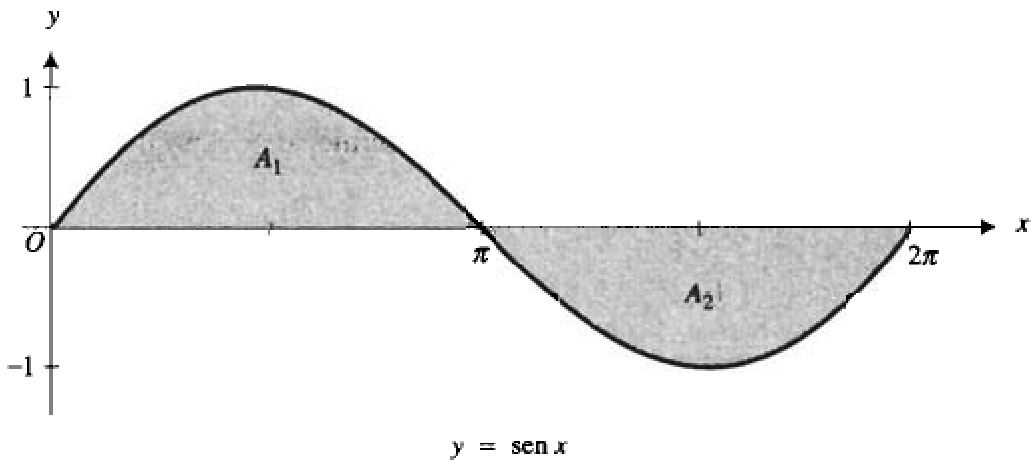


FIGURA 5

Para determinar la integral definida de una función f de a a b, cuando $a > b$, 0 cuando $a = b$, se tienen las definiciones siguientes.

Definición de $\int_a^b f(x)\,dx$ si $a > b$

Si $a > b$ y $\int_b^a f(x)\,dx$ existe, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Ejemplo 1

$$\int_0^3 x\,dx = -\int_0^3 x\,dx$$

$$= -9$$

Definición de $\int_a^a f(x)\, dx$

Si $f(a)$ existe, entonces

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0$$

Ejemplo 2

$$\int_1^1 x^2\, dx = 0$$

Propiedades de la integral definida

Si k es cualquier constante, entonces

$$\int_a^b k\, dx = k(b - a)$$

Ejemplo 3

$$\int_{-3}^{5} 4\, dx = 4[5 - (-3)]$$

$$= 4(8)$$

$$= 32$$

Si la función f es integrable en el intervalo cerrado $[a, b]$, y si k es cualquier constante, entonces

$$\int_a^b kf(x)\, dx = k\int_a^b f(x)\, dx$$

Si las funciones f y g son integrables en $[a, b]$, entonces $f + g$ es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)]\, dx$$

$$= \int_a^b f_1(x)\, dx \pm \int_a^b f_2(x)\, dx \pm \ldots \pm \int_a^b f_n(x)\, dx$$

Ejemplo 4: Utilizando los resultados de los ejemplos anteriores (2 y 3) y aplicando las propiedades de la integral definida para calcular el valor exacto de:

$$\int_0^3 (4x^2 - 2x + 5)\, dx$$

$$\int_0^3 x^2\, dx = 9 \quad \text{y} \quad \int_0^3 x\, dx = \frac{9}{2}$$

De las propiedades de la integral definida, se tiene

$$\begin{aligned}
\int_0^3 (4x^2 - 2x + 5)\, dx &= \int_0^3 4x^2\, dx - \int_0^3 2x\, dx + \int_0^3 5\, dx \\
&= 4\int_0^3 x^2\, dx - 2\int_0^3 x\, dx + 5\int_0^3 dx \\
&= 4(9) - 2(\tfrac{9}{2}) + 5(3 - 0) \\
&= 42
\end{aligned}$$

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y sea g una funcion tal que $g'(x) = f(x)$

para toda x en $[a,b]$,entonces:

$$\int_a^b \boldsymbol{f(t)dt = g(b) - g(a)}$$

(Si $x = a$ la derivada en $g'(x) = f(x)$ puede ser una derivada por la derecha y si $x = b$,la derivada en $g'(x) = f(x)$ puede ser una derivada por la izquierda).

Ahora sepuede obtener el valor exacto de la integral definida aplicando el teorema fundamental del cálculo. En elcalculo se denota:

$$[g(b) - g(a)] \quad por \quad g(x)]_a{}^b$$

Ejemplo

$$\int_1^2 \boldsymbol{x^4\, dx}$$

Comouna antiderivada de x^4 es $x^5/5$, por el teorema fundamental del calculo se tiene:

$$\int_1^2 \boldsymbol{x^4\, dx = \left.\frac{x^5}{5}\right]_1^2}$$

$$=\frac{35}{5} - \frac{1}{5} = \frac{31}{5}$$

El proceso de evaluación de unaintegral indefinida o definida se denomina integración.

La diferencia entre una integral indefinida y una integral definida debe enfatizarse. La integral definida$\int f(x)dx$ representaa todas las funciones cuya derivada es $f(x)$. Sin embargo,la integral definida$\int_a^b f(x)dx$ es un numero cuyo valor depende de la función f y de los numeros a y b y está definido como el limite de la suma de Riemann.

La integral indefinida implica una constante arbitraria, por ejemplo:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

Esta constante arbitraria C recibe el nombre de constante de integración. En laaplicación del teorema fundamental para evaluar una integral definida, no fue necesario incluir la constante arbitraria C en la expresion para $g(x)$ porque el teorema permite elegir cualquier antiderivada, incluyendo aquellaen la que $C = 0$.

Ejemplo

De la propiedad aditiva de las integrales definidas y el teorema fundamental del calculo, se tiene:

$$\int_{1/2}^{4} (x^3 + 6x^2 + 9x + 1) dx$$

$$= \int_{1/2}^{4} x^3\, dx + \int_{1/2}^{4} x^2\, dx + 9\int_{1/2}^{4} x\ dx + \int_{1/2}^{4} dx$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \Big]_{1/2}^{4}$$

$$= (64 - 128 + 72 + 4) - (\frac{1}{64} - \frac{1}{4} + \frac{9}{8} + \frac{1}{2})$$

$$= \frac{679}{64}$$

AREA BAJO LA CURVA

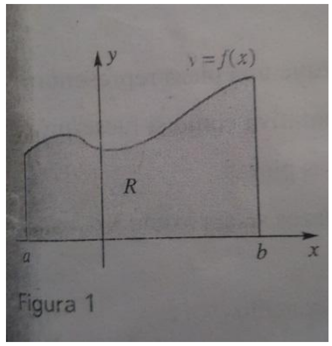
Anteriormente se definio el área de una región plana como el límite de una suma de Riemann y también se dijo que dicho límite es una integral.

En los ejemplos que se presentan a continuación, se empieza expresando el área requerida como el limite de la suma de Riemann, a fin de reafirmar el procedimiento utilizado en la expresión de dichas sumas para aplicaciones posteriores.

Una región por arriba del eje x

Suponga que $y = f(x)$ determina una curva en el plano xy y supongase que f es continua y no negativa en el intervalo $a \leq x \leq b$(como se muestra en la figura 1) Considerese la región R acotada por las gráficas de $y = f(x)$,$x = a$, $x = b$ y $y = 0$. Nos referimos a R como la región bajo y= f(x) entre x=a y x=b. Su área A (R) esta dada por:

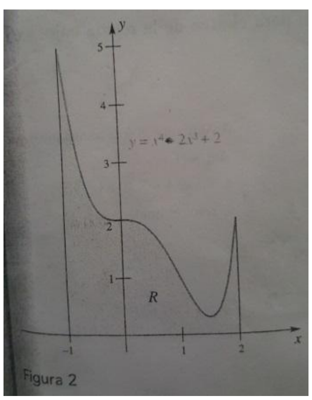
$$A\,(R) = \int_a^b f(x)dx$$



Ejemplo

Encuentre el área de la región R bajo $y = x^4 - 2x^3 + 2$ entre $x = -1\ y\ x = 2$

La gráfica de R se muestra en la figura 2. Una estimación razonable para el área de R es su base por una altura promedio, digamos (3)(2)= 6. El valor exacto es:



$$\boldsymbol{A\,(R) = \int_{-1}^{2} (x^4 - 2x^3 + 2)\,dx}$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + 2x\right]_{-1}^{2}$$

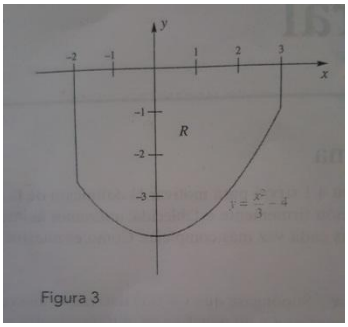
$$= \left(\frac{32}{5} + \frac{16}{2} + 4\right) - \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{2} - 2\right) = \frac{51}{10}$$

Una región debajo del eje x

El área es un número no negativo.Si la gráfica de $y = f(x)$ esta por debajo del eje x, entonces $\int_a^b f(x)dx$ es un numero negativo y, por lo tanto, no puede ser un area. Sin embargo, solo es el negativo del área de la región acotada por $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ y $y = 0$.

Ejemplo . Encuentre el área de la región R acotada por $y = \frac{x^2}{3} - 4$, el eje x, $x = -2$ y $x = 3$.

La región R se muestra en la figura 3. La estimación preliminar para el área es (5)(3)= 15. El valor exacto es:



$$A\ (R) = -\int_{-2}^{3}\left(\frac{x^2}{3} - 4\right)\ dx = \int_{-2}^{3}\left(-\frac{x^2}{3} + 4\right)\ dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{9} + 4x\right]_{-2}^{3}$$

$$= \left(-\frac{27}{59} + 12\right) - \left(\frac{8}{9} - 8\right) = \frac{145}{9}$$

Área de una región entre 2 curvas

Si f y g son continuas en el intervalo $[a, b]$ y $g(x) \leq f(x)$ para todos los valores de x en $[a, b]$,entonces el área por la región acotada por las gráficas de f y g y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es:

$$A = \int_{a}^{b} [f(x) - g(x)] dx$$

En la figura 4, las graficas de f y g se muestran arriba del eje x; sin embargo, esto no es necesario. El mismo integrando$[f(x) - g(x)]$ puede usarse mientras f y g sean continuas y $g(x) \leq f(x)$ sobre $[a, b]$. Este resulttado se resume graficamente en la figura 4. Un rectángulo vertical (de ancho Δx) implica una integración respecto a x, en tanto que un rectángulo horizontal (de ancho Δy) la implica respecto a y.

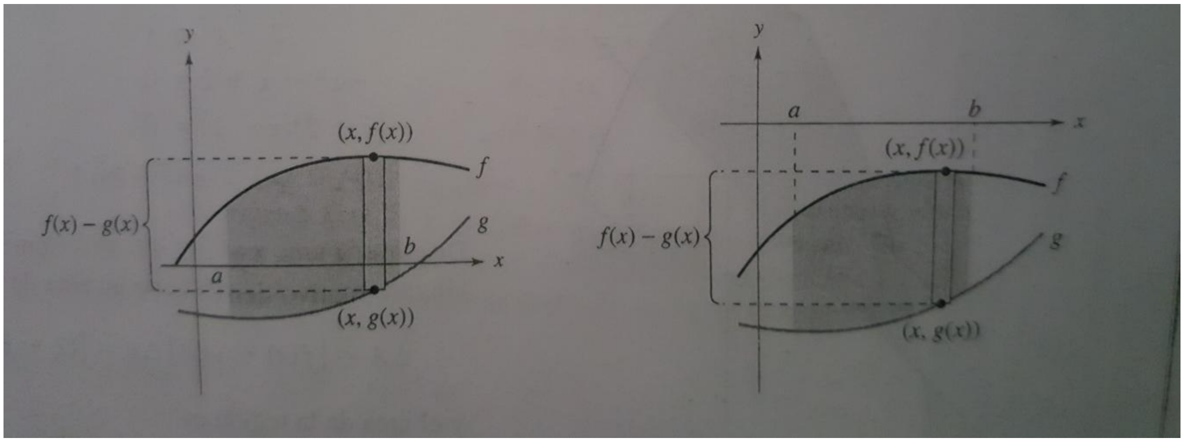
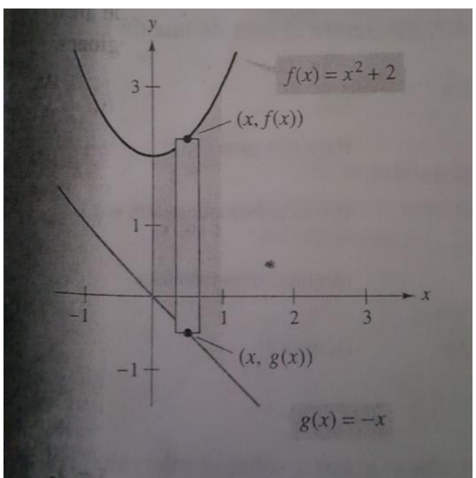


Figura 4

Ejemplo: Encuentre el área de la región acotada por las gráficas de $y = x^2 + 2$, $y = -x, x = 0,$ y $x = 1$.

Sea $g(x) = -x$ y $f(x) = y = x^2 + 2$. Entonces $g(x) \leq f(x)$ para todo x en $[0, 1]$, como se muestra en la figura 5. El área de laregión es:



Región acotada por la gráfica de f, la de g, $x = 0$, y $x = 1$.

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

$$= \int_0^1 [(x^2 + 2) - (-x)]dx$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 = \frac{17}{6}$$

Figura 5

SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

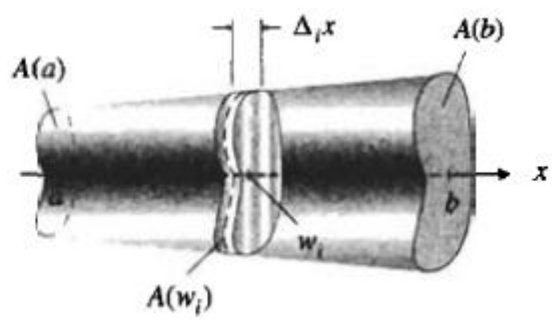
VOLÚMENES DE SOLIDOS MEDIANTE LOS MÉTODOS DE REBANADO, DE DISCOS Y DE ARANDELAS

Se dice que un sólido es un cilindro recto si está limitado pos dos regiones planas congruentes R_1 y R_2 que pertenecen a dos planos paralelos, por una superficie lateral generada por un segmento rectilíneo, que tiene sus extremos en las fronteras o limites R_1 y R_2, el cual se desplaza siempre en forma perpendicular a los planos R_1y R_2.

Si el área de la base de un cilindro recto es A unidades cuadradas y su altura es h unidades y si V unidades cubicas es su volumen, entonces

$$V = Ah$$

Se utilizará esta fórmula a fin de obtener un método que proporciones la medida del volumen de un sólido para el cual es área de cualquier sección plana (región plana formada por la intersección de un plano y el sólido) perpendicular a un eje es una función de la distancia perpendicular de la sección plana desde un punto fijo del eje.



Método de Rebanado

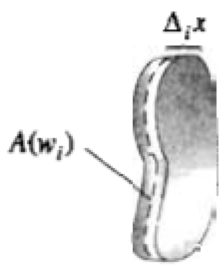
EL termino rebanado se utiliza cuando se aplica la siguiente definición

Definición del volumen de un solido

Sea S un solido tal que S esta entre dos planos perpendiculares al eje x en a y b. Si la medida del área de la sección plana S, perpendicular al eje x en x, esta dada por $A(x)$, donde A es continua en $[a, b]$, entonces la medida del volumen de S esta dada por

$$V = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(w_i)\Delta_i x = \int_a^b A(x)dx$$

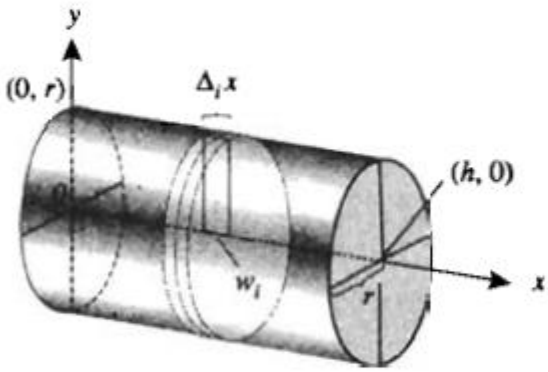
El proceso es semejante al rebanado de una hogaza de pan en muchas porciones muy delgadas de modo que todas las porciones juntas constituyen la hogaza completa



Ejemplo

Un cilindro circular recto, que tiene una altura de h unidades y un radio de la base de r unidades, con los ejes coordenados dispuestos de modo que el origen está en el centro de la base y su altura se mide a lo largo del lado positivo del eje x. Una sección plana a una distancia de x unidades del origen tiene un área de $A(x)$ unidades cuadradas, donde

$$A(x) = \pi r^2$$

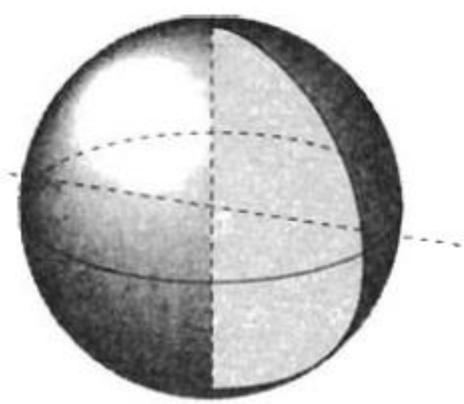


Un elemento de volumen mostrado, es un cilindro recto con un área de la base de $A(w_i)$ unidades cuadradas y espesor de $\Delta_i x$ unidades. De este modo, si V unidades cubicas es el volumen del cilindro circular recto, entonces

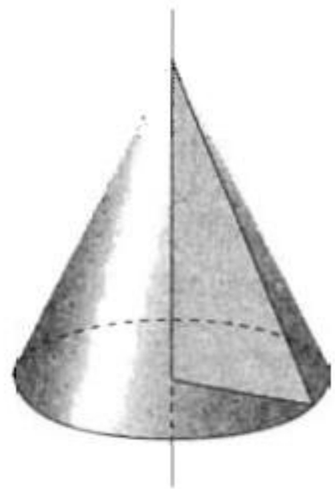
$$V = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(w_i)\Delta_i x = \int_0^h A(x)dx = \int_0^h \pi r^2 dx = [\pi r^2 x]_0^h = \pi r^2 h - \pi r^2(0) = \pi r^2 h$$

Solido de revolución

Un sólido de revolución es un sólido que se obtiene al girar una región de un plano alrededor de una recta del plano, llamada eje de revolución, el cual puede interceptar o no a la región. Por ejemplo, si la región limitada por una semicircunferencia y su diámetro se gira alrededor del diámetro, se genera una esfera.



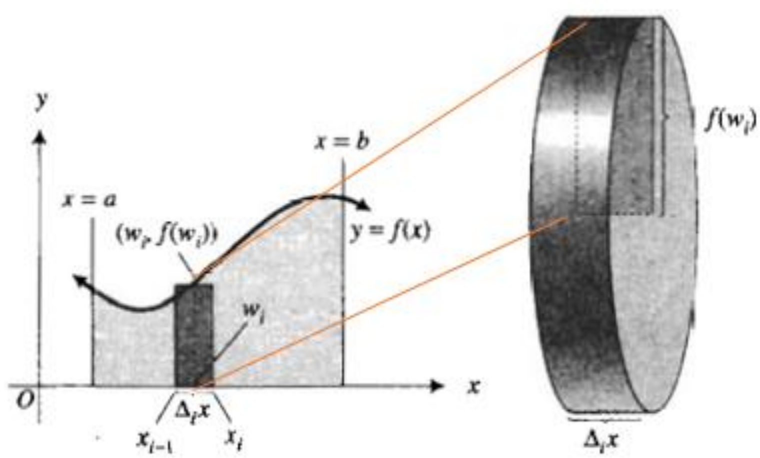
Si la región limitada por un triángulo rectángulo se gira alrededor de uno de sus catetos, se obtiene un cono circular recto.



Método de discos

Sea f un función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, y suponga que $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a,b]$. Si S es el solido de revolución obtenido al girar alrededor del eje x en la región limitada por la curva $y = f(x)$, en el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$, y si V unidades cubicas es el volumen de S, entonces

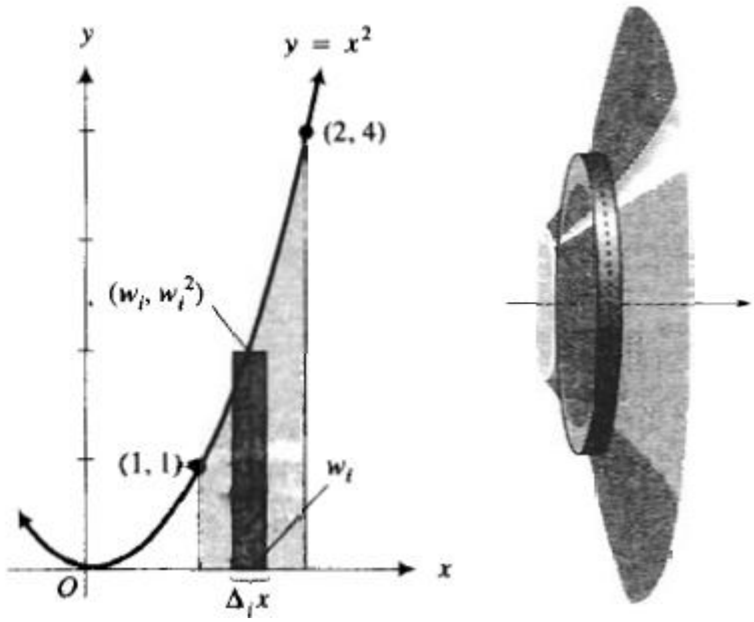
$$V = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi[f(w_i)]^2 \Delta_i x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$



Ejemplo

Calcule el volumen del solido de revolución generado cuando la región agotada por la curva $y = x^2$, el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 2$ se gira alrededor del eje x. La medida del volumen del disco está dado por

$$\Delta_i V = \pi(w_i^2)^2 \Delta_i x = \pi w_i^4 \Delta_i x$$



Entonces

$$V = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi w_i^4 \Delta_i x = \pi \int_1^2 x^4 dx$$

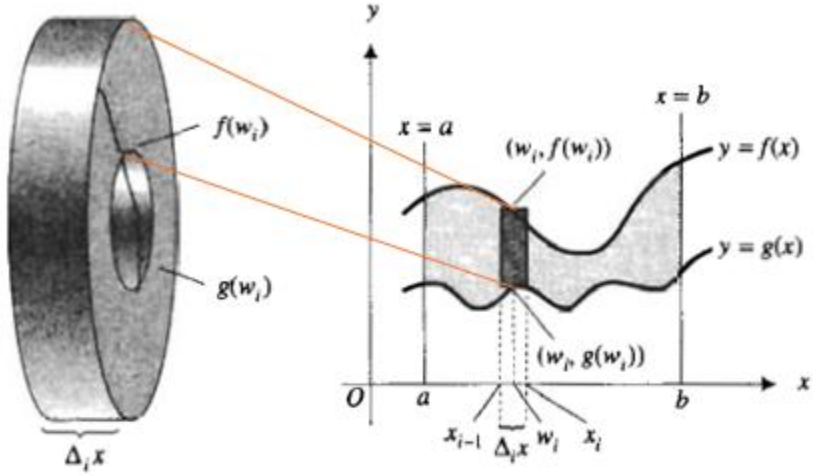
$$= \pi \int_1^2 x^4 dx = \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2 = \pi \left(\frac{2^5}{5} - \frac{1^5}{5}\right) = \frac{31}{5}\pi$$

Conclusión: El volumen del solido de revolución es $\frac{31}{5}\pi$ unidades cubicas.

Metodo Arandelas

Suponga que el eje de revolución no es una frontera de la región que se girara. Sea f y g dos funciones continuas en $[a, b]$ tales que $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para toda x. Si V unidades cubicas es el volumen del solido de revolución generado al girar alrededor del eje x la región limitada por las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ y las rectas x=a y a=b entonces

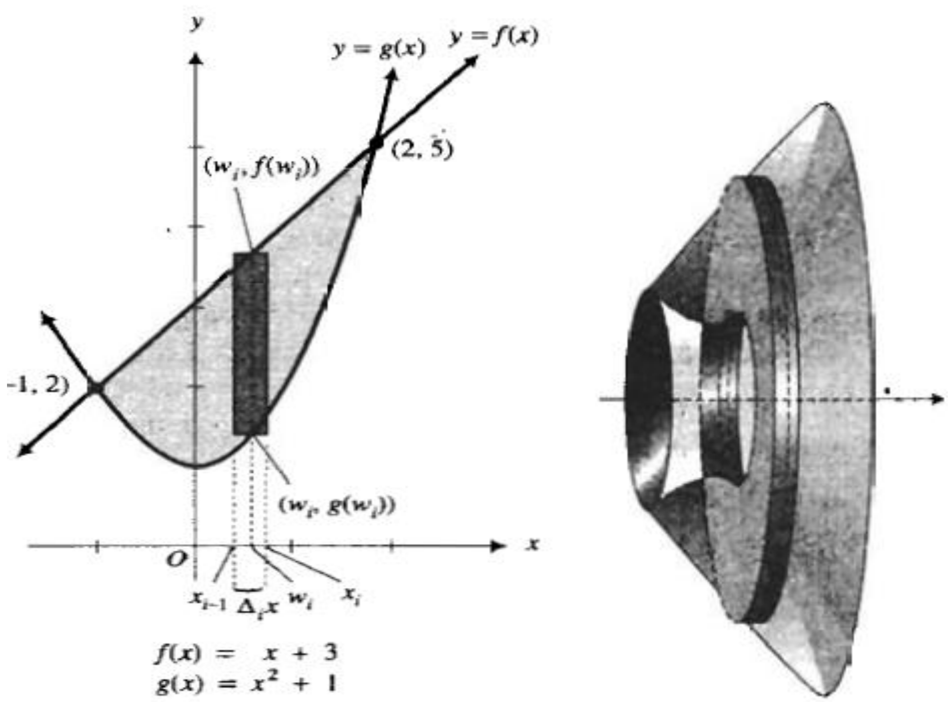
$$V = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi([f(w_i)]^2 - [g(w_i)]^2)\Delta_i x = \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx$$



Ejemplo

Calcule el volumen del solido generado al girar alrededor del eje x la región acotada por la parábola $y = x^2 + 1$y la recta $y = x + 3$.

Solución: Los puntos de intercepción de las dos curvas son. $(-1,2)$ y $(2,5)$.



Si $f(x) = x + 3$ y $g(x) = x^2\ + 1$ entonces la medida del volumen de la arandela circular es

$$V = \lim_{||\Delta||\to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi([f(w_i)]^2 - [g(w_i)]^2)\Delta_i x = \pi \int_{-1}^{2} ([f(x)]^2 - [g(x)]^2)dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{2} ([x+3]^2 - [x^2+1]^2)dx = \pi \int_{-1}^{2} (x^2 + 6x + 9 - x^4 - 2x^2 - 1)dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{2} (-x^4 - x^2 + 6x + 8)dx = \pi \left[-\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} + 8x \right]_{-1}^{2}$$

$$= \pi \left[-\frac{(2)^5}{5} - \frac{(2)^3}{3} + \frac{6(2)^2}{2} + 8(2) + \frac{(-1)^5}{5} + \frac{(-1)^3}{3} - \frac{6(-1)^2}{2} - 8(-1) \right]$$

$$= \frac{117}{5}\pi$$

Conclusión: el volumen del solido de revolución es $\frac{117}{5}\pi$ unidades cubicas.

SERIES Y SUCESIONES

Sucesiones

Un ejemplo de una sucesión finita es

$$2, 4, 6, 8, 10$$

Y otro ejemplo de una sucesión infinita es

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \cdots$$

El cálculo trata con sucesiones infinitas, la palabra “sucesión” en este caso hará referencia a una sucesión infinita.

Una función sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto $\{1, 2, 3, 4, \cdots, n, \cdots\}$ de todos los números enteros positivos.

Los números del contra dominio de una función sucesión se nomina elementos. Una sucesión consiste de los elementos de una función sucesión listados en orden.

Ejemplo

Sea f la función definida por $f(n) = \frac{n}{2n+1}$ $n \in \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$

Entonces f es una función sucesión, y

$$f(1) = \frac{1}{3} \quad f(2) = \frac{2}{5} \quad f(3) = \frac{3}{7} \quad f(4) = \frac{4}{9} \quad f(5) = \frac{5}{11}$$

Y así sucesivamente. Los elementos de la sucesión definida por f son $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}$, etcétera.

Por lo general, cuando los elementos se enlistan en orden se indica el n-esimo elemento $f(n)$ de la sucesión. De este modo los elementos de la asociación pueden escribirse como $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, \cdots, \frac{n}{2n+1}, \cdots$

También se utiliza la notación de subíndice $[a_n]$ para expresar una sucesión para la cual $f(n) = a_n$

Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ y f está definida para todo numero entero positivo, entonces también $\lim_{n\to+\infty} f(n) = L$, cuando n se restringe a los números enteros positivos.

Si una sucesión $\{a_n\}$ tiene un límite, se dice que la sucesión es convergente, y a_n converge a ese límite. Si la sucesión no es convergente, es divergente.

Ejemplo

Encontrar el límite de $f(n) = \frac{n}{2n+1}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{2n}{n} + \frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{+\infty}} = \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2}$$

Así, el $\lim_{n\to+\infty} f(n) = \frac{1}{2}$ cuando n se restringe a los números enteros positivos y es convergente.

Si {a} y {b} son sucesiones convergentes y c es una constante, entonces

i. La sucesión constante {c} tiene a c como su limite

ii. $\lim_{n\to+\infty} ca_n = c \lim_{n\to+\infty} a_n$

iii. $\lim_{n\to+\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n \pm \lim_{n\to+\infty} b_n$

iv. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n b_n = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\right)\left(\lim\limits_{n\to+\infty} b_n\right)$

v. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\left(\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n}$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n \neq 0$, y cada $b_n \neq 0$

Ejemplo

Determine si $\left\{\frac{4n^3}{2n^2+1} sen\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}$ es convergente y su limite

Solución

$$\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{4n^2}{2n^2+1}\right)\left(\lim_{n\to+\infty} nsen\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) = \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{4n^2}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}\right)\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n}{n} sen\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right)$$

$$= \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{4}{2+\frac{1}{n^2}}\right)\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{sen\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right)$$

Aplicando regla de L’Hôpital

$$= \left(\frac{4}{2+0}\right)\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{-\frac{\pi}{n^2} cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{-\frac{1}{n^2}}\right) = \left(\frac{4}{2}\right)(\pi\cos(0)) = (2)(\pi) = 2\pi$$

Por lo tanto la sucesión es convergente y su límite es 2π

Sucesiones crecientes y decrecientes

Una sucesión $\{a_n\}$ es

i. Creciente si $a_n \leq a_{n+1}$ para toda n

ii. Decreciente si $a_n \geq a_{n+1}$ para toda n

Una sucesión es monótona si es creciente o decreciente.

Ejemplo

Determine si las sucesiones son crecientes o decrecientes

a) $\left\{\frac{\mathrm{n}}{2\mathrm{n}+1}\right\} \to \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \cdots, \frac{\mathrm{n}}{2\mathrm{n}+1}, \frac{\mathrm{n}+1}{2(\mathrm{n}+1)+1}$ la sucesión es creciente y es monótona

b) $\left\{\frac{1}{n}\right\} \rightarrow 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}$ la sucesión es decreciente y es monótona

c) $\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\} \rightarrow 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \frac{(-1)^{(n+1)+1}}{n+1}$ la sucesión no es creciente ni decreciente por lo tanto no es monótona.

Series

En matemáticas, una serie es la generalización de la noción de suma aplicada a los términos de una sucesión matemática. Informalmente, es el resultado de sumar los términos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$$

lo que suele escribirse en forma más compacta con el símbolo de sumatorio:

$$S_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

El estudio de las series consiste en la evaluación de la suma de un número finito n de términos sucesivos, y mediante un paso al límite identificar el comportamiento de la serie a medida que n crece indefinidamente.

Serie Finita

Tiene un primer y último término bien definidos

$$\sum_{n=1}^{5} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

Serie Infinita

Tiene infinidad de términos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + \cdots$$

Existe una gran cantidad de métodos para determinar la naturaleza de convergencia o no-convergencia de las series matemáticas, sin realizar explícitamente los cálculos.

Si $\{u_n\}$ es una sucesión y $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$ entonces $\{S_n\}$ es una sucesión de sumas parciales denominada serie infinita y se denota por

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

Los números $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ son los términos de la serie infinita.

Ejemplo

Considere la sucesión $\left\{\frac{1}{2^{n-1}}\right\} \to 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{2^{n-1}}, \ldots$ a partir de esta sucesión se forma la sucesión de sumas parciales

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$$

$$S_5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{31}{16}$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

En esta sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ es la serie infinita denotada por

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$$

Cuando $\{S_n\}$ es una sucesión de sumas parciales, entonces

$$S_{n-1} = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1}$$

De modo que

$$S_n = u_{n-1} + u_n$$

Convergencia de una serie infinita

Considere que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ denota una serie infinita dada para la cual $\{S_n\}$ es la sucesión de sumas parciales. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ existe y es igual a S, entonces la serie converge y S es la suma de la serie. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ no existe, entonces la serie es divergente, y la serie no tiene suma.

Ejemplo

La serie infinita del ejemplo anterior es

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$$

Y la sucesión de sumas parciales es $\{S_n\}$, donde

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

Para determinar si la serie tiene una suma, debe calcularse $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. A fin de determinar una fórmula para S_n se utiliza la identidad algebraica

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Si se aplica esta identidad con $a = 1$ y $b = \frac{1}{2}$ se tiene

$$1^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$S_n = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

Se calcula el limite

$$\lim_{n\to+\infty}\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\lim_{n\to+\infty}2-\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=2-0=2$$

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=2$$

Por lo tanto, la serie infinita converge y tiene la suma 2.

Serie geométrica

Una serie infinita de la forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty}ar^{n-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots\frac{a}{1-r}$$

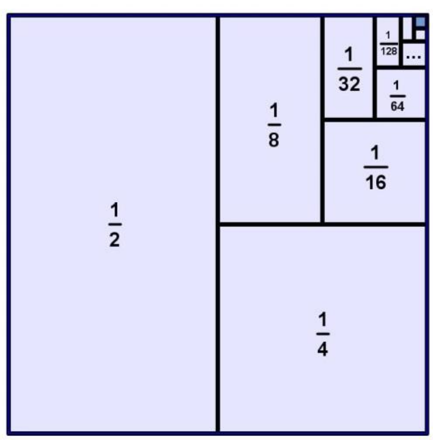
Se denomina serie geométrica y converge a la suma $\frac{a}{1-r}$ si $|r|<1$, y diverge si $|r|\geq 1$.

Ejemplo

Siguiente serie geométrica donde $r=\frac{1}{2}$ y $a=1$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$$

Donde $r<1$ entonces es convergente

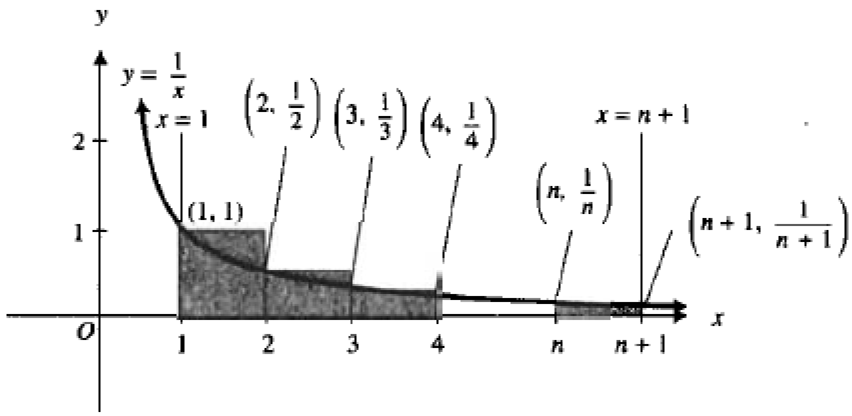


Serie armónica

Una serie infinita de la forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

Se denomina serie armónica y siempre es divergente



Serie alterna

Una serie infinita de la forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1} a_n + \cdots$$

Y la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n} a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots + (-1)^{n+1} a_n + \cdots$$

Se denomina series alternantes donde $a_n > 0$ y $a_{n+1} < a_n$ para todos los números positivos n.

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$, entonces la serie alternante es convergente.

Ejemplo

Demuestre que la siguiente serie alternante es convergente

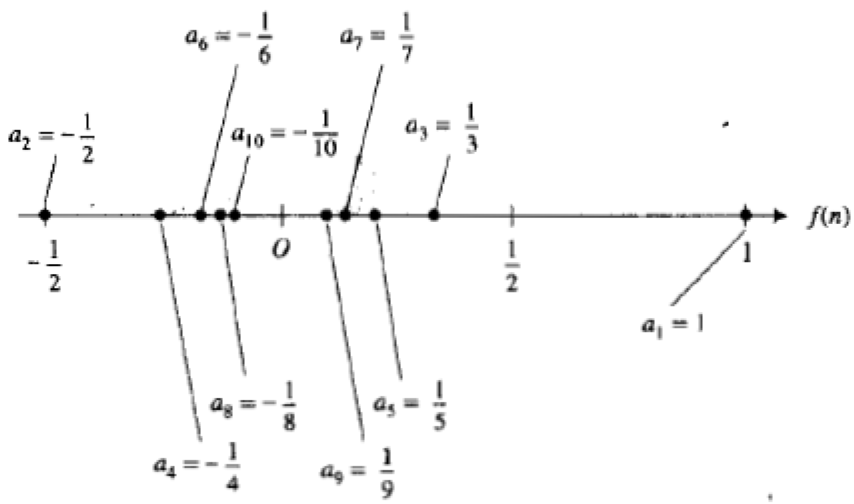
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

Solución

La serie dada es

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + (-1)^{n+2}\frac{1}{n+1} \ldots$$

Como $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$para todos los números enteros positivos n, y $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, entonces, la serie dada es convergente.



Serie de Fourier

Una serie de Fourier es una serie infinita que converge puntualmente a una función periódica y continua a trozos (o por partes). Las series de Fourier constituyen la herramienta matemática básica del análisis de Fourier empleado para analizar funciones periódicas a través de la descomposición de dicha función en una suma infinita de funciones sinusoidales mucho más simples (como combinación de senos y cosenos con frecuencias enteras).

La serie de Fourier de una función periódica f (x) de periodo T, también conocida como señal, definida en un intervalo de longitud T está dada por:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\omega_0 x) + b\_nsen(n\omega_0 x))$$

Donde

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_0 = \frac{1}{T/2}\int_T f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{T/2}\int_T f(x)\cos(n\omega_0 x)\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{T/2}\int_T f(x)\,\mathrm{sen}(n\omega_0 x)\,dx$$

Forma compacta

En ocasiones es más útil conocer la amplitud y la fase en términos cosinusoidales en lugar de amplitudes cosinusoidales y sinusoidal. Otra forma de expresar la compleja forma de la serie de Fourier es:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n\to 1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t - \theta\_n)$$

Donde

$$A_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + ab_n^2}$$

$$\theta_n = \tan^{-1}\frac{b_n}{a_n}$$

Forma exponencial

Por la identidad de Euler para la exponencial compleja, operando adecuadamente, si

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

la serie de Fourier se puede expresar como la suma de dos series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{-n}\, e^{-inx} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n\, e^{inx}$$

En forma más compacta:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\, e^{inx}$$

estas ecuaciones solo son válidas cuando el $T = 2\pi$ con $\omega = 1$. Otra forma de expresar la forma compleja de la serie de Fourier es:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\, e^{inx}$$

Donde

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt = \frac{a_0}{2}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-j\omega_n t}dt = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{j\omega_n t}dt = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$$

$$[c_n] = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + ab_n^2}$$

Formulación moderna

Realmente el desarrollo en serie de Fourier se hace para funciones de cuadrado integrable, es decir, para funciones que cumplan que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$$

El conjunto de todas las funciones integrables definidas en el intervalo $[-\pi, \pi]$ se denota con $L^2([-\pi, \pi])$. Este conjunto, tiene definido un producto interno dado por:

$$\langle f, g \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

que lo dota de estructura de espacio de Hilbert. De este modo, todas las funciones de $L^2([-\pi, \pi])$ pueden desarrollarse en series de Fourier. Así, el conjunto $\{e_n = e^{inx}: n \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal del espacio $L^2([-\pi, \pi])$. El desarrollo de Fourier se puede expresar como:

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n$$

Donde $c_n = \langle f, e_n \rangle$ son los coeficientes del desarrollo de Fourier.

Por último, la identidad de Parseval dice que dada una función f de cuadrado integrable y los coeficientes de Fourier c_n , se verifica que:

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

En lenguaje técnico, podríamos decir que hay una isometría entre el espacio de funciones de cuadrado integrable y el espacio de sucesiones lineales indexadas en los enteros cuyos términos tienen cuadrados sumables.

Sumas parciales

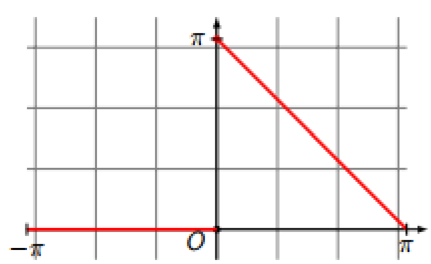
Para la serie de Fourier de una función $f\ (x)$ periódica definida en un intervalo de longitud T la k-ésima suma parcial, representada $por\ Sk\ (x)$ está dada por:

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} (a_n \cos(n\omega_0 x) + b\_nsen(n\omega_0 x))$$

Ejemplo

Expanda en una serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & para - \pi < x < 0 \\ \pi - x & para\ 0 \leq x < \pi \end{cases}$$



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

$$a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi} (\pi - x)dx\right)$$

$$a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi} (\pi - x)dx\right) = \frac{1}{\pi}\left[\pi x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$a_o = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(\omega_0 nx)dx$$

Recuerde $\omega_0 = 1$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi} (\pi - x)\cos(nx)dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi n^2}\ \left[\left(\pi sen(nx) - \cos(nx) - nxsen(nx)\right)\right]_0^{\pi}$$

$$a_n = \frac{1 - (-1)^n}{\pi n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{sen}(\omega_0 nx)dx$$

Recuerde $\omega_0 = 1$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi} (\pi - x)\mathrm{sen}(nx)dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi n^2}\ \left[\left(-\pi\pi cos(nx) - \mathrm{s}\,en(nx) + nxcos(nx)\right)\right]_0^{\pi}$$

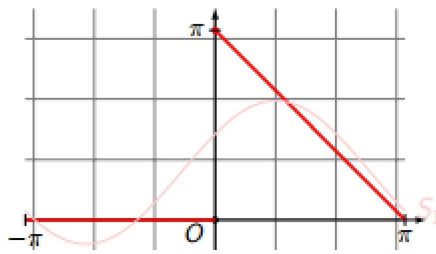
$$b_n = \frac{1}{n}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier quedaron:

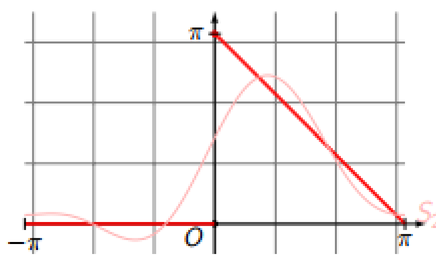
$$a_o = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad a_n = \frac{1-(-1)^n}{\pi n^2} \quad ; \quad b_n = \frac{1}{n}$$

Las aproximaciones a $f(x)$ mediante las sumas parciales quedan de la siguiente manera

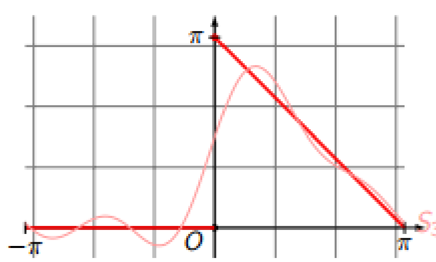
$$S_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} cos(x) + sen(x)$$



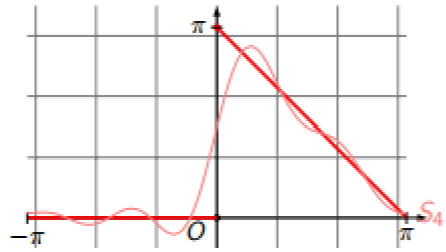
$$S_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} cos(x) + sen(x) + \frac{1}{2} sen(2x)$$



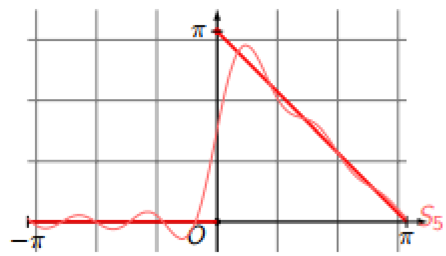
$$S_3 = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} cos(x) + sen(x) + \frac{1}{2} sen(2x) + \frac{2}{9\pi} \cos(3x) + \frac{1}{3} sen(3x)$$



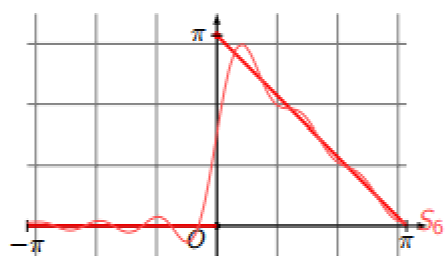
$$S_4 = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} cos(x) + sen(x) + \frac{1}{2} sen(2x) + \frac{2}{9\pi} \cos(3x) + \frac{1}{3} sen(3x) + \frac{1}{4} sen(4x)$$



$$S_5 = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} cos(x) + sen(x) + \frac{1}{2} sen(2x) + \frac{2}{9\pi}\cos(3x) + \frac{1}{3} sen(3x) + \frac{1}{4} sen(4x) + \frac{2}{25\pi}\cos(5x) + \frac{1}{5} sen(5x)$$



$$S_6 = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} cos(x) + sen(x) + \frac{1}{2} sen(2x) + \frac{2}{9\pi}\cos(3x) + \frac{1}{3} sen(3x) + \frac{1}{4} sen(4x) + \frac{2}{25\pi}\cos(5x) + \frac{1}{5} sen(5x) + \frac{1}{6} sen(6x)$$



Ortogonalidad de senos y cosenos

Se dice que un conjunto de funciones $f_k(t)$ son ortogonales en el intervalo $a < t < b$ si dos

Funciones cualesquiera $f_m(t)$, $f_n\ (t)$ de dicho conjunto cumplen

$$\int_a^b f_m(t)f_n(t)dt = \begin{cases} 0 & para\ m \neq n \\ r_n & para\ m = n \end{cases}$$

Ejemplo

Las funciones t y t^2 son ortogonales en el intervalo $-1 < t < 1$, ya que

$$\int_{-1}^{1} tt^2 dt = \int_{-1}^{1} t^3 dt = \left[\frac{t^2}{4}\right]_{-1}^{2} = 0$$

Las funciones $sen\ t$ y $cos\ t$ son ortogonales en el intervalo $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, ya que

$$\int_{-\pi}^{\pi} sent\ cost\ dt = \left[\frac{sen^2 t}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

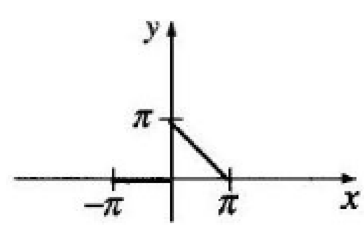
Condiciones de convergencia

Sea f y f' continuas en tramos en el intervalo $(-p, p)$; esto es, sean continuas excepto en un numero finito de puntos en el intervalo y con discontinuidades solo finitas en esos puntos. Entonces, la serie de Fourier de f en el intervalo converge hacia $f(x)$ en un punto de continuidad. En un punto de discontinuidad de la serie de Fourier converge hacia el promedio

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

En donde $f(x+)$ y $f(x-)$ representan el limite de f en x, desde la derecha y la izquierda, respectivamente.

Ejemplo



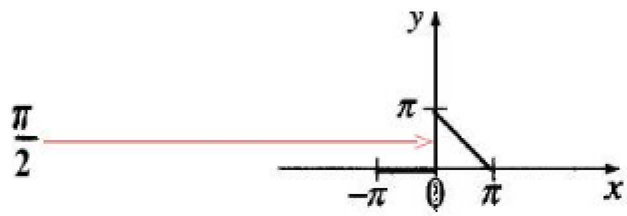
$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ \pi - x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi} \cos(nx) + \frac{1}{n} sen(nx) \right\}$$

La función del ejemplo satisface las condiciones de convergencia. Asi, para toda x del intervalo $(-\pi,\pi)$, excepto cuando $x = 0$, la serie convergerá hacia $f(x)$. Cuando $x = 0$ la función es discontinua y por consiguiente la serie convergerá a

$$\frac{f(0+)+f(0-)}{2} = \frac{\pi+0}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$f(x)$ una función definida para todo x, con periodo 2π. Entonces, bajo condiciones muy generales, la serie de Fourier de f converge a $f(x)$ para todo x.



Paridad de funciones

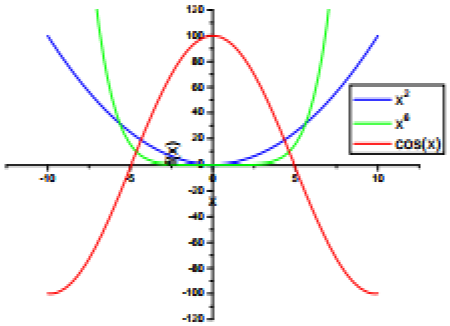
En matemáticas, se puede clasificar a las funciones según su paridad: Las funciones pueden ser pares, impares o no tener paridad.

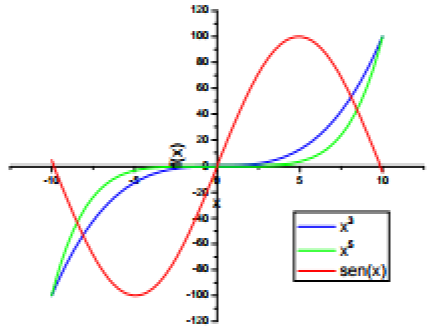
Aquellas funciones que poseen paridad satisfacen una serie de relaciones particulares de simetría, con respecto a sus funciones inversas aditivas (funciones inversas aditivas u opuestas son funciones que al sumarlas el resultado es cero).

Función par: $f\,(-x) = f(\,x)$

Función impar: $f\,(-x) = -f(\,x)$

Las funciones pares e impares deben su nombre a la paridad de las potencias en las funciones de potencias que satisfacen cada condición: La función $f(x) = x^n$: es una función par si n es un entero par, y es una función impar si n es un entero impar.





Sea f es una función par de Periodo $2T$, integrable en el intervalo $[0,2T]$, con serie de Fourier

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi}{T}x\right)+b_n sen\left(\frac{n\pi}{T}x\right)\right)$$

Si f es par entonces

$b_n=0$ para cualquier n

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{T}x\right)dx$$

Si f es impar entonces

$a_n=0$ para cualquier n

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{T}x\right)dx$$

Propiedades matemáticas de las funciones pares e impares

- La única función que es tanto par e impar es la función cero $f(x)=0 \quad para\ todo\ x$.
- La suma de una función par y una impar no es ni par ni impar, a menos de que una de las funciones sea el cero.
- La suma de dos funciones par es una función par, y todo múltiplo de una función par es una función par.

- La suma de dos funciones impares es una función impar, y todo múltiplo constante de una función impar es una función impar.
- El producto de dos funciones pares es una función par.
- El producto de dos funciones impares es una función par.
- El producto de una función par y una función impar es una función impar.
- El cociente de dos funciones pares es una función par.
- El cociente de dos funciones impares es una función par.
- El cociente de una función par y una función impar es una función impar.
- La derivada de una función impar es una función par.

Si f es una función para, entonces:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx \ = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

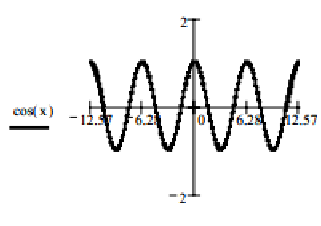
Si f es una función impar, entonces:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx \ = 0$$

Ejemplo

Siendo $f(x) = cos(x)$ para los valores de $-\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}$ determinar si es par o no.

Haciendo $f(-x) = cos(-x)$, por la identidad $cos(-x) = \cos(x)$, de tal marea que $f(-x) = cos(-x)$, por lo tanto la función $\cos(x)$ es una función par.



Determinar si la función $f(x) = sen(x)$, en el intervalo $-\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}$, es par o impar.

Haciendo $f(-x) = sen(-x) = -sen(x) = -f(x)$

Por lo tanto la función $sen(x)$ es función impar.